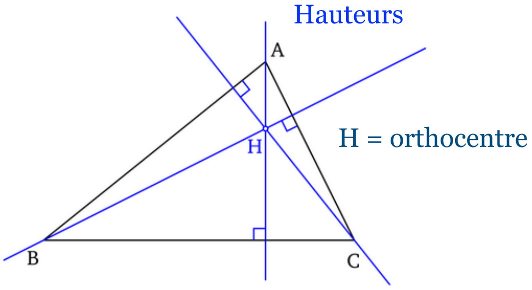
ESPACE ET GEOMETRIE

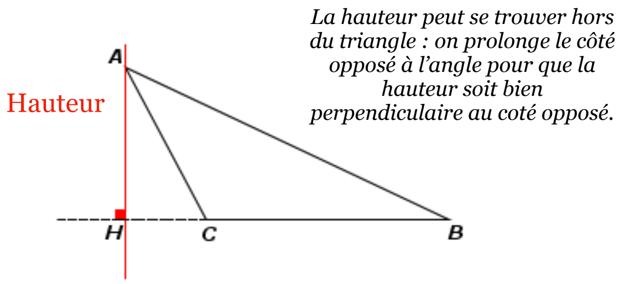
PARTIE 2 : Les triangles

Le vocabulaire à connaitre

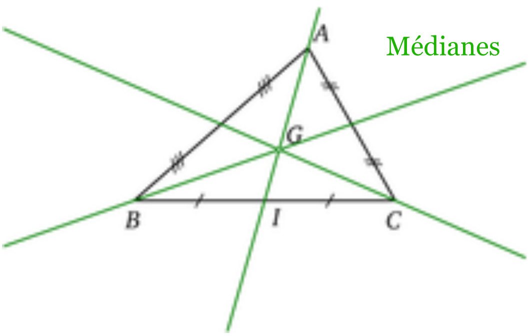
- Un triangle a trois angles, trois sommets, et trois côtés.

- La **hauteur** d'un triangle est une droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé. Un triangle à trois hauteurs.
  - Les trois hauteurs du triangle se coupent en un même point : on dit qu'elles sont **concourantes**.
  - Leur point commun est appelé « **orthocentre du triangle** ».
  - Dans le cas particulier du triangle rectangle, l'orthocentre est le sommet de l'angle droit.



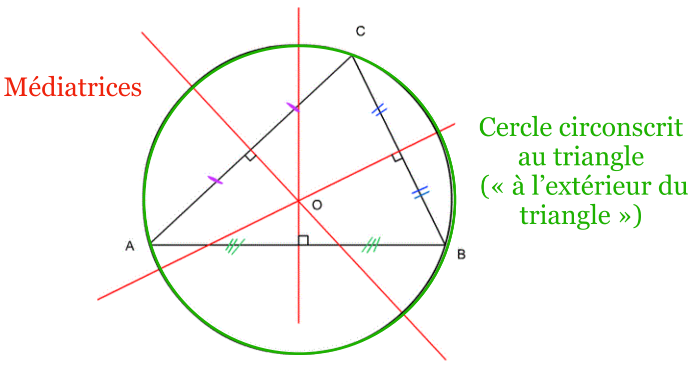


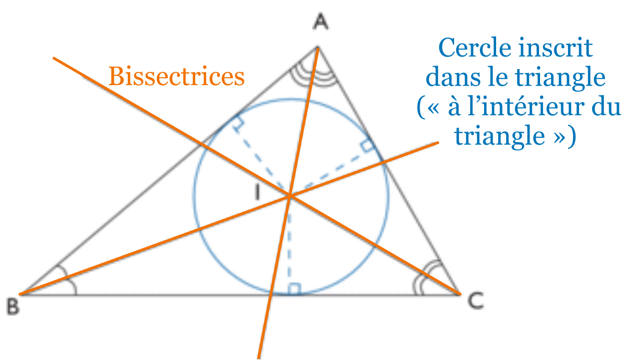
- La **médiane** d'un triangle est une droite passant par un sommet et par le milieu du côté opposé.
  - Les trois médianes du triangle se coupent en un même point : on dit qu'elles sont **concourantes**.
  - Leur point commun est appelé « **centre de gravité du triangle** ».
  - Sur chaque médiane, ce centre de gravité est situé au deux tiers de sa longueur, en partant du sommet, ou à un tiers en partant du côté.



- La **médiatrice** d'un côté d'un triangle est une droite perpendiculaire au côté de son milieu.
  - Les médiatrices des côtés d'un triangle se coupent en un même point, elles sont **concourantes**.
  - Ce point commun est équidistant des trois sommets : c'est le **centre du cercle** passant par les trois sommets du triangle, et que l'on appelle « **cercle circonscrit au triangle** ».

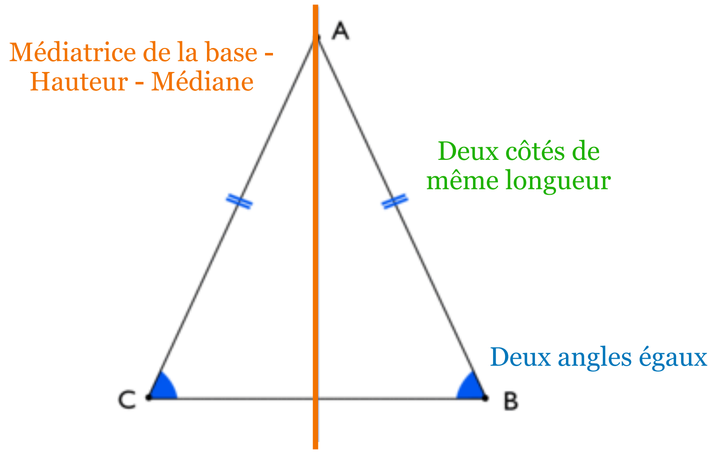
- La **bissectrice** d'un angle d'un triangle partage l'angle en deux angles adjacents égaux.
- Les bissectrices des angles d'un triangle se coupent en un même point, elles sont **concourantes**.
- Ce point est équidistant des trois côtés du triangle ; c'est le centre du cercle tangent aux trois côtés du triangle, et que l'on appelle « **cercle inscrit dans le triangle** ».





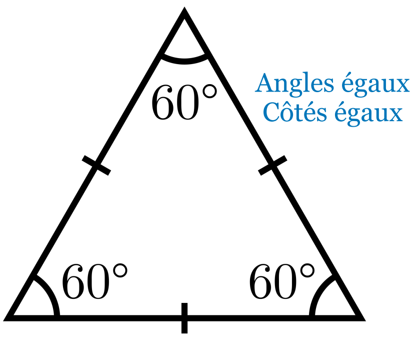
- Un **triangle isocèle** est un triangle qui a deux côtés de même longueur.
  - Dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux.
  - Dans un triangle isocèle, la médiatrice de la base passe par le sommet principal : c'est un axe de symétrie du triangle.
  - La médiatrice de la base est à la fois la hauteur et la médiane relative à la base. C'est aussi le support de la bissectrice de l'angle.

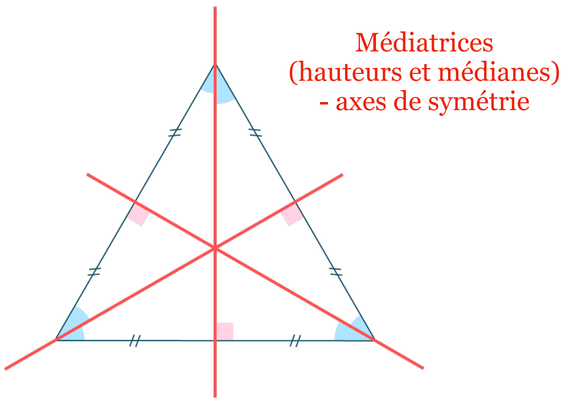
- **Principes :**
  - Si un triangle a deux côtés de même longueur, alors c'est un triangle isocèle.
  - Si un triangle à deux côtés égaux, alors c'est un triangle isocèle.
  - Si la médiatrice d'un côté d'un triangle passe par le sommet opposé, alors c'est un triangle isocèle.



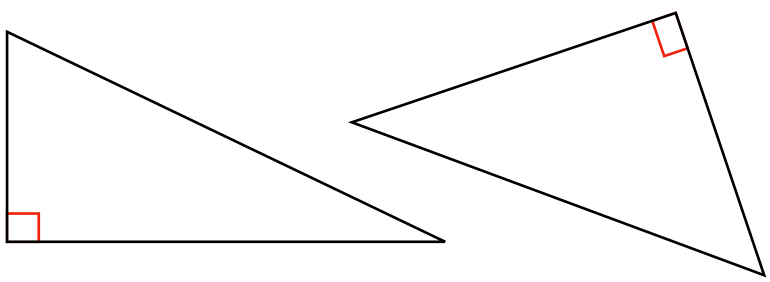
- Un **triangle équilatéral** est un triangle qui a trois côtés de même longueur.
  - Dans un triangle équilatéral, les trois angles sont égaux : chacun vaut 60°.
  - Un triangle équilatéral à trois axes de symétrie : les médiatrices des côtés du triangle. Chaque médiatrice est à la fois une hauteur et une médiane du triangle. C'est aussi le support d'une bissectrice d'un angle du triangle.

- **Principes** :
  - Si un triangle a trois côtés de même longueur, alors c'est un triangle équilatéral.
  - Si un triangle a trois angles de 60°, alors c'est un triangle équilatéral.
  - Si un triangle a trois axes de symétrie, alors c'est un triangle équilatéral.



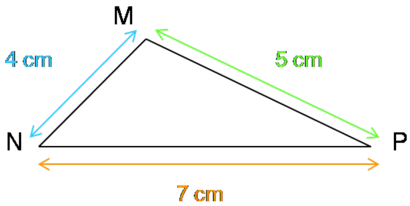


- Un **triangle rectangle** est un triangle possédant un angle droit, soit un angle à 90°.



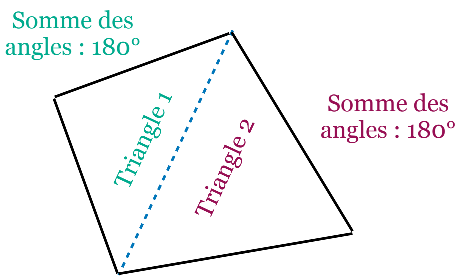
Les propriétés de base

- **L'inégalité triangulaire** : dans un triangle, chaque côté est strictement inférieur à la somme des deux autres. Trois nombres ne peuvent être les mesures des côtés d'un triangle que si le plus grand est strictement inférieur à la somme des deux autres.



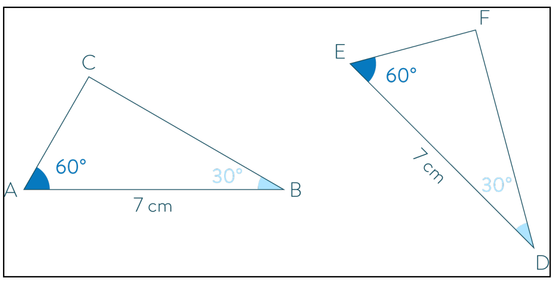
7 est bien inférieur à 4 + 5 (=9)

- **La somme des angles d'un triangle est toujours égale à 180°**.
  - Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires (la somme de ces deux angles est égales à 90°).
  - La somme des angles d'un quadrilatère est de 360° ; dans un quadrilatère, on peut trouver deux triangles. La sommes des angles de chacun de ces triangles est de 180°, donc, s'il y a deux triangles, la somme des angles des deux triangles est égale à 360°.

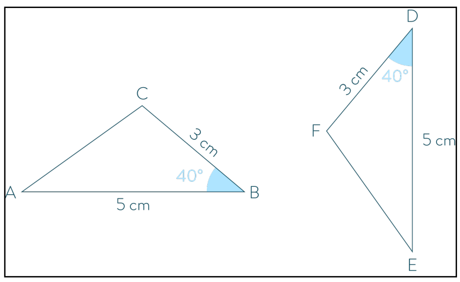


- **Cas d'égalité des triangles** :
  - **Premier cas d'égalité:** Si deux triangles ont un côté de même longueur, adjacent à deux angles respectivement égaux, alors ces triangles sont superposables (égaux).
  - **Deuxième cas d'égalité** : Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement de même longueur, alors ces triangles sont superposables (égaux).
  - **Troisième cas d'égalité** : Si les trois triangles ont les trois côtés respectivement de même longueur, alors ces triangles sont superposables (égaux).

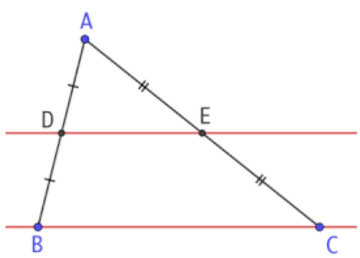
1er cas d'égalité



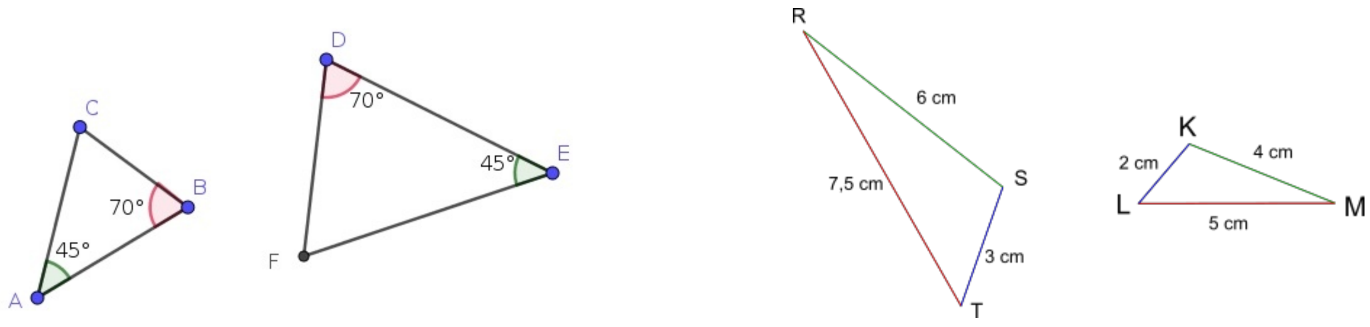
2ème cas d'égalité



- **La droite des milieux**, trois théorèmes :
- Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.
- Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un des côtés et est parallèle à un deuxième côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.
- Dans un triangle, la longueur du segment joignant les milieux des deux côtés est égale à la moitié de celle du troisième côté.



- On dit que **deux triangles sont semblables** si leurs angles sont respectivement égaux et si les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels. Pour prouver que des triangles sont semblables, il faut que l'un des trois « cas de similitude » soit prouvés :
  - Deux triangles qui ont deux angles respectivement égaux sont semblables.
  - Deux triangles qui ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement proportionnels sont semblables.
  - Deux triangles qui ont leurs trois côtés respectivement proportionnels sont semblables.

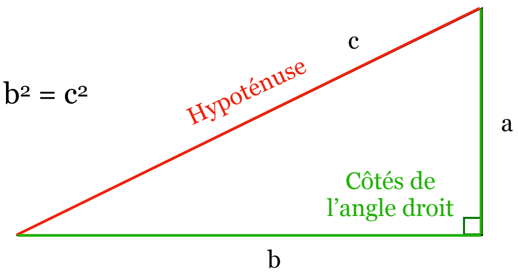


Le théorème de Pythagore et sa réciproque

- **Dans un triangle rectangle**, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés (des deux côtés de l'angle droit).
- Lorsqu'on sait qu'un triangle est rectangle, l'égalité de Pythagore permet de calculer un côté, si l'on connait les deux autres côtés.

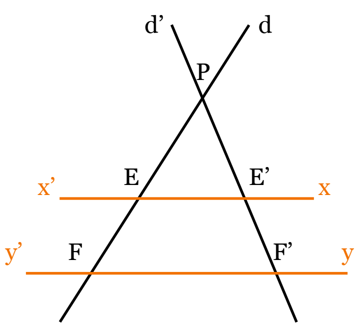
- **La réciproque** du théorème de Pythagore permet de prouver d'un triangle est rectangle. Si l'égalité de Pythagore est vérifiée, alors le triangle est un triangle rectangle.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Le théorème de Thalès et sa réciproque

- **Le théorème de Thalès** permet de prouver que des quotients sont égaux, et permet de calculer des longueurs.
  - On a deux droites d et d' sécantes en P.
  - Une droite x'x coupe la droite d en E et la droite d' en E'
  - Une droite y'y coupe la droite d en F et la droite d' en F'



D'après le théorème de Thalès :
Si (EE') et (FF') sont parallèles,
Alors on a : $\frac{PE}{PF} = \frac{PE'}{PF'} = \frac{EE'}{FF'}$

- On parle alors de **triangles à côtés proportionnels** : en coupant les côtés d'un triangle par une droite parallèle à un des côtés, il apparait un nouveau triangle dont les côtés sont proportionnels à ceux du triangle initial.

- **La réciproque** du théorème de Thalès permet de prouver et conclure que deux droites sont parallèles si les rapports d'égalité entre les côtés sont prouvés.

Trigonométrie

○ Calcul d'angles :

○ Le cosinus d'un angle aigu d'un triangle rectangle :

dans un triangle ABC rectangle en B, on a :

$$\text{Cos } \hat{A} = \frac{\text{côté adjacent pour } \hat{A}}{\text{hypoténuse}}$$

○ Le sinus d'un angle aigu d'un triangle rectangle :

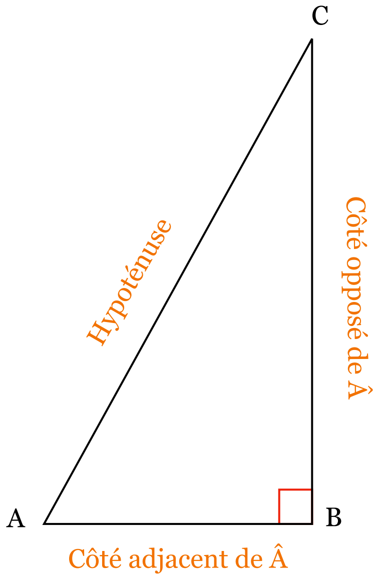
dans un triangle ABC rectangle en B, on a :

$$\text{Sin } \hat{A} = \frac{\text{côté opposé pour } \hat{A}}{\text{hypoténuse}}$$

○ La tangente d'un angle aigu d'un triangle rectangle :

dans un triangle ABC rectangle en B, on a :

$$\text{Tan } \hat{A} = \frac{\text{côté opposé pour } \hat{A}}{\text{côté adjacent pour } \hat{A}}$$



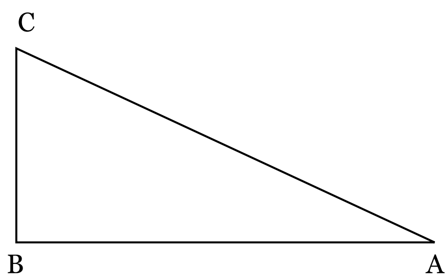
○ **Calcul de longueur :** calculer des longueurs avec la trigonométrie. Trois possibilités :
ABC est un triangle rectangle en B.

- ○ On sait que $\text{Cos } \hat{A} = \frac{\text{côté adjacent pour } \hat{A}}{\text{hypoténuse}}$

  $\text{Cos } \hat{A} = \frac{BA}{CA}$

  Le côté adjacent pour Â est tel que BA = CA x cos Â

  L'hypoténuse est telle que $CA = \frac{BA}{\cos \hat{A}}$



- ○ On sait que $\text{Sin } \hat{A} = \frac{\text{côté opposé pour } \hat{A}}{\text{hypoténuse}}$ $\quad \text{Sin } \hat{A} = \frac{CB}{CA}$

  Le côté opposé pour Â est tel que CB = CA x sin Â

  L'hypoténuse est telle que $CA = \frac{CB}{\sin \hat{A}}$

- ○ On sait que $\text{Tan } \hat{A} = \frac{\text{côté opposé pour } \hat{A}}{\text{côté adjacent pour } \hat{A}}$ $\quad \text{Tan } \hat{A} = \frac{CB}{BA}$

  Le côté opposé pour Â est tel que CB = BA x tan Â

  Le côté adjacent pour Â est telle que $BA = \frac{CB}{\tan \hat{A}}$